JGP - Vol. 4, n. 1, 1987

Conjugaisons finies et milieux continus en relativité générale

L. LAMOUREUX-BROUSSE

Département de Mécanique Analytique
Université Paris VI
4 Place Jussieu - 75252 Paris Cedex 05 - France

Abstract. *We present here the main elements of a mechanics of relativistic continua relying upon a concept of «finite conjugacy» between two relativistic motions described by two unit vector-fields u and u' defined on two different relativistic manifolds* $\mathcal{M}$ *and* $\mathcal{M}'$.
This purely relativistic, global, and intrinsic theory leads, together with a new approach of the deformation tensors in relativity, to a differential system of equations for the conjugacies which is neither under-determined nor over-determined. A rough study of the propagation of the conjugacy-waves shows then that it is advisable to consider the notion of a finite conjugacy as a satisfying relativistic extension of the classical and tridimensional notion of a finite deformation in mechanics, and to identify the spatial conjugacy-waves obtained with the ordinary acoustic waves.
Drastic particularizations of the space-times $\mathcal{M}$ *and* $\mathcal{M}'$, *of the motions u and u', of the admissible types of conjugacies and of the elastic behaviour of the continua under study allow to recover, as very important but particular cases, the tridimensional non-relativistic theory of elasticity for finite deformations and non-linear behaviour, as well as the main theories of relativistic elasticity already proposed by Mmes Choquet-Bruhat and Lamoureux-Brousse, Rayner, Carter and Carter-Quintana, Grot-Eringen .... The obtained system of equations generalizes also to the finite case some aspects of the infinitesimal theory of Weber and Papapetrou.*

Key-Words: Mechanics of solids, Elasticity, Relativity.
1980 Mathematics Subject Classification: 73 B 05, 73 C 99, 83 C.

1. INTRODUCTION

Sous l'impulsion initiale donnée par Weber [13] lors de la recherche des effets élastiques provoqués par le passage d'une onde gravitationnelle, puis sur les possibilités d'applications aux étoiles à neutrons, de nombreux auteurs, dont Madame Choquet-Bruhat et moi-même [5], ont travaillé à des présentations diverses et variées de la mécanique des milieux continus relativistes non fluides.

Les diverses théories obtenues dans des cadres variés et avec des finalités différentes, conduisent toutes au même système linéaire ou linéarisé des équations du mouvement d'un matériau isotrope homogène linéaire de type classique, du moins lorsque la théorie est poussée assez loin pour que l'on puisse écrire de telles équations. Mais, sauf filiation naturelle explicite, il est difficile de comparer les diverses théories existantes tant elles sont différentes par leur langage et leur approche; il est aussi certaines fois difficile de comparer ces théories relativistes avec la présentation usuelle de l'élasticité classique où l'on utilise un état du milieu privilégié, réel ou fictif, qui sert de référence et permet de définir une déformation. Le but de ce travail n'était pas de proposer une théorie nouvelle de plus en mécanique des milieux continus relativistes, mais de comparer les divers points de vue existants et de comprendre comment ils pouvaient conduire malgré leur diversité à des phénomènes de propagation similaires.

Nous avons été alors amenée à reconsidérer ces théories de milieux continus relativistes non fluides comme des cas particuliers importants d'une même «théorie» à deux variétés relativistes. Dans ce cadre nous avons pu écrire des équations générales exactes et étudier quelques exemples de propagation d'ondes.

Nous dégageons tout d'abord un cadre géométrique commun aux espaces-temps et aux mouvements des milieux continus relativistes. Nous introduisons la notion de conjugaison finie de mouvements, puis les tenseurs déformations associés. Nous remarquons alors les classes intéressantes de conjugaisons «holochrones», ou «holotopes», pour lesquelles ces divers tenseurs-déformations prennent des formes particulières. Nous écrivons ensuite les équations de ces transformations à partir des équations d'Einstein en variables d'Euler (i.e.: dans l'état déformé), puis en variables de référence (i.e. dans l'état de référence réel ou fictif). Nous pouvons alors écrire les équations exactes des ondes non linéaires dans le cas d'un comportement du type élastique général. Nous discutons ensuite brièvement le problème de la propagation de telles ondes, dans le cas général, puis dans le cas de comportements linéaires usuels et enfin dans le cas homogène et isotrope qui est un test bien connu. Nous retrouvons comme cas particuliers de notre approche, l'élasticité en mécanique newtonienne ainsi que les principales théories existantes en élasticité relativiste.

2. NOTION DE CONJUGAISON FINIE

Un mouvement de milieu continu relativiste est décrit par le quadruplet $(\mathscr{M}, g, u, \rho)$ où:

– $\mathscr{M}$ est une variété différentiable de dimension quatre;
– g est une métrique sur $\mathscr{M}$, hyperbolique normale, de signature $(+, -, -, -)$;
– u est un champ de vecteurs sur $\mathscr{M}$, unitaire pour la métrique g;
– ρ est un champ scalaire positif sur $\mathscr{M}$.

Les trajectoires, orientées positivement, de u sont les lignes d'univers des particules du milieu considéré, ρ est la densité de matière.

Sous l'influence de faits extérieurs ou intérieurs, non précisés, le milieu continu peut être amené à se «déformer»; mais en relativité générale tout doit être considéré du point de vue dynamique, donc en termes d'espaces-temps, d'autre part le déplacement de la matière va en général modifier la métrique; il vient donc un nouveau mouvement de milieu continu décrit par un nouveau quadruplet que nous noterons $(\mathscr{M}', g', u', \rho')$. Nous allons préciser quelles sont les relations entre $(\mathscr{M}, g, u, \rho)$ et $(\mathscr{M}', g', u', \rho')$ pour que ces deux données correspondent à ce que l'on entend intuitivement et habituellement par deux mouvements d'un même milieu.

Il est naturel tout d'abord de supposer qu'entre $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ il existe un difféomorphisme d de classe C^2, c'est à dire une application bijective, d'inverse d^{-1} où d et d^{-1} sont deux fois continûment différentiables. Un tel difféomorphisme n'echange pas, en général, les métriques g et g', pas plus que les champs de vecteurs u et u'; au mouvement u sur $\mathscr{M}$ correspond par transport le mouvement $u''' = d_*(u)$ sur $\mathscr{M}'$ qui peut être munie de la métrique relativiste $g''' = d^{-1*}(g)$; le champ u''' est unitaire pour g'''.

Si les champs u' et u''' ont même congruence de lignes d'univers avec la même orientation nous disons que d est une *conjugaison* des mouvements associés à u et u'. Plus précisément nous disons que d conjugue le mouvement u en le mouvement u' ou encore que d^{-1} conjugue le mouvement u' en le mouvement u.

Soit φ une conjugaison du mouvement u en le mouvement u': elle est dite *holochrone* si et seulement si elle préserve les champs de vecteurs unitaires en présence; c'est à dire si, et seulement si, $\varphi_*(u) = u'$ ou encore si et seulement si $u = \varphi_*^{-1}(u')$; l'inverse de φ, notée Ψ, est également holochrone. Pour une conjugaison quelconque nous appelons K la norme de $\varphi_*(u)$ pour la métrique g', alors u' sera égal à $\frac{1}{K}\,\varphi_*(u)$.

Pour que $(\mathscr{M}, g, u, \rho)$ et $(\mathscr{M}', g', u', \rho')$ représentent deux mouvements d'un «même milieu» continu relativiste, il est naturel de supposer qu'il existe une conjugaison φ du mouvement u en le mouvement u': cela correspond à des variétés $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ difféomorphes, à des congruences de lignes d'univers échangées qui nous semble traduire la conservation des particules et des espace-temps emplis par leurs lignes d'univers; de plus il faut évidemment supposer que ρ et ρ' se correspondent par le difféomorphisme φ considéré comme changement de variables, ce qui traduit la conservation de la matière lors de la «déformation». Nous ne reviendrons plus dans la suite sur cette condition qui sera implicitement supposée vérifiée dès qu'il sera question de densité de matière.

En revanche il n'est pas raisonnable d'exiger que la conjugaison φ soit une isométrie car en relativité générale il faut évidemment tenir compte de l'interaction entre la répartition globale de la matière dans l'espace-temps et le champ gravitationnel. Pour cette raison, et afin d'éviter toute confusion, en particulier entre «variables de référence» sur $\mathscr{M}$ et variables d'Euler sur $\mathscr{M}'$ nous n'identifierons pas $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$, sauf mention explicite contraire.

3. TENSEURS - DÉFORMATIONS ASSOCIÉS AUX CONJUGAISONS DE MOUVEMENTS

Afin de décrire le comportement de certains milieux relativistes nous avons été amenée à définir des tenseurs-déformations.

Soit donc une conjugaison φ du mouvement u sur l'espace-temps $(\mathscr{M}, g)$ en un mouvement u' sur l'espace-temps $(\mathscr{M}', g')$. Soit ω et ω' les formes covariantes définies respectivement sur $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ et associées respectivement à (u, g) et (u', g'); les projecteurs d'espace sont les tenseurs deux fois covariants $\gamma = g - \omega \otimes \omega$ et $\gamma' = g' - \omega' \otimes \omega'$.

Notre premier tenseur déformation est le tenseur $\epsilon^{(1)}$ défini sur $\mathscr{M}$ par la relation

$$\epsilon^{(1)} = -\frac{1}{2}[\varphi^*(\gamma') - \gamma],$$

où φ^* désigne le transport des tenseurs deux fois covariants de $\mathscr{M}'$ vers $\mathscr{M}$ induit par φ. Le signe moins a été introduit pour tenir compte du fait que γ est à trois carrés négatifs; avec la présence simultanée du coefficient $\frac{1}{2}$, cela nous permettra de retrouver dans certains cas particuliers exactement la définition du tenseur déformation de la mécanique classique. Puisque Ψ est aussi une application différentiable, on peut transporter $\epsilon^{(1)}$ sur $\mathscr{M}'$ par l'intermédiaire de Ψ; cette image, notée $\epsilon'^{(1)}$, s'écrit:

$$\epsilon'^{(1)} = -\frac{1}{2}[\gamma' - \Psi^*(\gamma)].$$

Ce tenseur sur $\mathscr{M}'$ est l'opposé du premier tenseur déformation qui peut être associé à Ψ considérée comme une conjugaison du mouvement u' sur $\mathscr{M}'$ en le mouvement u sur $\mathscr{M}$.

Nous pouvons définir ce tenseur $\epsilon'^{(1)}$ directement sur $\mathscr{M}'$ sans faire intervenir $\epsilon^{(1)}$; le tenseur $\epsilon^{(1)}$ apparaît alors comme le transporté de $\epsilon'^{(1)}$ sur $\mathscr{M}$ par φ puisque φ et Ψ sont deux difféomorphismes inverses l'un de l'autre.

Notre deuxième tenseur-deformation est par définition:

$$\epsilon^{(2)} = -\frac{1}{2}[\varphi^*(g') - g].$$

Il mesure l'écart de φ à une isométrie entre les deux variétés de dimension quatre en présence munies de leur métrique. Sa définition ne dépend que de ces métriques et de la conjugaison des mouvements en présence.

Par transport sur $\mathscr{M}'$, ou par définition directe, on définit:

$$\epsilon'^{(2)} = -\frac{1}{2}[g' - \Psi^*(g)].$$

Ce couple $(\epsilon^{(2)}, \epsilon'^{(2)})$ est une seconde généralisation possible, naturelle et intrinsèque du tenseur-déformation classique au cas des variétés quadridimensionnelles de la relativité générale. A notre connaissance il n'avait jamais été considéré.

La comparaison de ces deux tenseurs-déformations conduit naturellement à la notion de conjugaison *holotope*: nous dirons qu'une conjugaison φ est holotope si et seulement si $\Psi^*(\omega) = \omega'$, ou, ce qui revient au même, si $\varphi^*(\omega') = \omega$. Ces conditions équivalentes peuvent être interprétées physiquement en terme de conservation de l'espace physique tridimensionnel local. Pour une conjugaison φ holotope, les deux tenseurs $\epsilon^{(1)}$ et $\epsilon^{(2)}$ sont égaux. Il est évident que ces deux tenseurs déformations $\epsilon^{(1)}$ et $\epsilon^{(2)}$ peuvent être plus généralement définis pour tout difféomorphisme des espaces-temps $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$.

Remarque 1. A partir de ces deux tenseurs-déformations on peut construire d'autres tenseurs par utilisation des projecteurs d'espace; on peut aussi construire des tenseurs taux de déformation d'ordre quelconque en prenant leurs dérivées de Lie par rapport aux champs de vecteurs en présence; on peut aussi combiner ces deux procédés .... Tous les tenseurs ainsi obtenus sont définis de façon *intrinsèque*.

Remarque 2. Nous avons considéré comme on le fait habituellement les tenseurs déformations possibles sous leur forme covariante. Nous aurions pu considérer sur $\mathscr{M}'$ les expressions contravariantes $g'^{\alpha\beta}$ et $g'''^{\alpha\beta}$ et définir

$$E'^{(2)\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(g'^{\alpha\beta} - g'''^{\alpha\beta})$$

et

$$E'^{(1)\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\gamma'^{\alpha\beta} - \gamma'''^{\alpha\beta})$$

avec $\gamma'''^{\alpha\beta} = g'''^{\alpha\beta} - u'''^{\alpha} u'''^{\beta}$. Pour une conjugaison holochrone il vient $u' = u'''$, et les deux expressions contravariantes de $E'^{(1)}$ et $E'^{(2)}$ sont égales. En général ces expressions ne sont pas les formes contravariantes des tenseurs $\epsilon'^{(1)}$ et $\epsilon'^{(2)}$ ni pour la dualité induite par g', ni pour celle induite par g'''. En revanche si g' et g''' sont suffisamment voisins, $E'^{(1)}$ (resp. $E'^{(2)}$) sera très peu différent des deux formes contravariantes possibles de $\epsilon'^{(1)}$ (resp. $\epsilon'^{(2)}$).

4. EQUATIONS DES CONJUGAISONS POUR UN COMPORTEMENT ÉLASTIQUE GÉNÉRALISÉ

Soit φ une conjugaison du mouvement $(\mathscr{M}, g, u)$ en le mouvement $(\mathscr{M}', g', u')$; et soit σ un champ de tenseurs deux fois contravariants défini sur $\mathscr{M}$, et que nous appelons précontraintes. Nous écrivons sur $\mathscr{M}'$ le tenseur impulsion-énergie du milieu dit déformé sous la forme

$$T' = \rho' f' u' \otimes u' - \sigma' - \varphi_*(\sigma)$$

où ρ' est la densité au repos, et où $(f' - 1)$ est le scalaire énergie interne spécifique. Le tenseur σ' ainsi défini sur $\mathscr{M}'$ est appelé tenseur-contraintes. Les expressions de σ' et de f' décrivent le comportement du milieu sous l'effet de la conjugaison φ.

Nous dirons que le milieu décrit par $(\mathscr{M}, g, u, \rho)$ a un «comportement élastique généralisé» lors de la transformation φ si et seulement si σ' et f' sont complètement déterminés par ρ, σ et par la géométrie de la situation, c'est à dire par la donnée de $(\mathscr{M}, g, u)$, de $(\mathscr{M}', g')$ et de la transformation φ.

Le comportement du milieu sera dit élastique généralisé à l'ordre 1 si la dépendance en φ de σ' et f' au point $y = \varphi(x)$ ne fait intervenir que y et les dérivées partielles premières de φ en x.

Pour fixer les idées nous développerons les calculs en considérant des comportements élastiques généralisés à l'ordre 1 où la différentielle de φ n'intervient que par les transports des différents tenseurs en présence et par l'un des 8 tenseurs-déformations précédemment définis. Ce comportement est l'analogue de celui des matériaux les plus usuels et les plus étudiés en acoustique non linéaire classique. Le cas d'une dépendance générale en les dérivées partielles premières de φ, conceptuellement plus simple, et utile en présence de phénomènes électromagnétiques par exemple, peut être traité de façon similaire et conduit aux mêmes types de résultats.

Les dix équations d'Einstein pour le mouvement déformé entraînent sur $\mathcal{M}'$ les quatre équations de conservation suivantes, valables dans tout système de coordonnées sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$:

$$\nabla'_\alpha(\rho' f' u'^\alpha u'^\beta - \sigma'^{\alpha\beta} - A^\alpha_\lambda A^\beta_\mu \sigma^{\lambda\mu}) = 0,$$

la dérivation covariante est évidemment prise pour la métrique g', et nous avons noté $A^\alpha_\lambda = \dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\lambda}$.

Ce système d'équations est un système de quatre équations aux dérivées partielles d'ordre 2 en les 4 composantes de φ; il peut être appelé «système des équations aux conjugaisons» pour le problème fondamental de la mécanique des milieux continus relativistes suivant:

Etant donné un milieu continu relativiste $(\mathcal{M}, g, u, \rho)$, son comportement, une variété $\mathcal{M}'$ difféomorphe à $\mathcal{M}$ et munie d'une métrique g' relativiste donnée, déterminer les difféomorphismes de l'espace-temps $\mathcal{M}$ sur l'espace-temps $\mathcal{M}'$ qui conjuguent le mouvement u sur $(\mathcal{M}, g)$ en un mouvement u' sur $(\mathcal{M}', g')$ vérifiant les lois de la relativité générale.

5. EQUATIONS AUX CONJUGAISONS DANS LES VARIABLES DE RÉFÉRENCE

Les équations écrites précédemment font intervenir simultanément le point courant y de $\mathcal{M}'$, son antécédent $x = \Psi(y)$, des dérivées partielles en y et des dérivées partielles en x; pour pouvoir étudier leur système nous les écrivons uniquement dans les variables de référence x. En considérant le cas particulier où l'espace $\mathcal{M}$ est un produit $S^3 \times R$, on constaterait que ces variables quadridimensionnelles de référence généralisent les variables de Langrage complétées par la variable temps.

L'équation de continuité, ou de conservation du nombre de baryons, lors du mouvement déformé, est: $\nabla'_\alpha(\rho' u'^\alpha) = 0$; rappelons que la densité de matière ρ' provient de ρ par le transport selon φ. Puisque σ' et f' sont des fonctions des y^α, $\epsilon'_{\lambda\mu}$ et $\sigma'^{\lambda\mu}_0$, où $\sigma'^{\lambda\mu}_0$ est l'image dans $\mathcal{M}'$ des précontraintes $\sigma^{\lambda\mu}$, les termes $\dfrac{\partial f'}{\partial \epsilon'_{\lambda\mu}}$, $\dfrac{\partial \sigma'^{\alpha\beta}}{\partial y^\alpha}$, $\dfrac{\partial \sigma'^{\alpha\beta}}{\partial \sigma'^{\lambda\mu}_0}$, $\dfrac{\partial \sigma'^{\alpha\beta}}{\partial \epsilon'_{\lambda\mu}}$ interviennent dans les équations aux conjugaisons, nous les noterons respectivement $\Sigma'^{\lambda\mu}$ (par analogie avec la mécanique classique), t^β, $\Pi'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu}$ et $C'^{\alpha\beta\lambda\mu}$.

La conjugaison φ est holochrone si et seulement si K est partout égal à 1, c'est à dire si et seulement si K vaut 1 en un point et si, partout sur $\mathscr{M}'$ supposée connexe, l'égalité suivante est vérifiée:

$$0 = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g'_{\gamma\delta}}{\partial y^{\alpha}} A^{\gamma}_{\rho} u^{\rho} A^{\delta}_{\sigma} u^{\sigma} + \right.$$

$$\left. + g'_{\gamma\delta} A^{\delta}_{\epsilon} u^{\epsilon} \left(A^{\gamma}_{\rho\sigma} B^{\sigma}_{\alpha} u^{\rho} + A^{\gamma}_{\rho} B^{\sigma}_{\alpha} \frac{\partial u^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \right) \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous utilisons le second tenseur déformation défini au début de ce travail et nous omettons l'indice (2) pour ne pas alourdir l'écriture; nous conduirions les calculs de la même façon si nous utilisions le premier tenseur déformation. L'expression de $\epsilon'^{(2)}$ dans $\mathscr{M}'$ est $-\frac{1}{2}(g' - \Psi^*(g))$; sa dérivée par rapport à y^{α}, si $B^{\alpha}_{\lambda}(y)$ désigne $\dfrac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial y^{\lambda}}$, est:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \{ B^{\gamma}_{\lambda}(y)\, B^{\delta}_{\mu}(y)\, g_{\gamma\delta}(\Psi(y)) - g'_{\lambda\mu}(y) \},$$

ou encore:

$$\frac{1}{2} g_{\gamma\delta} [B^{\gamma}_{\lambda\alpha} B^{\delta}_{\mu} + B^{\gamma}_{\lambda} B^{\delta}_{\mu\alpha}] + \frac{1}{2} B^{\gamma}_{\lambda} B^{\delta}_{\mu} B^{\rho}_{\alpha} \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g'_{\lambda\mu}}{\partial y^{\alpha}}$$

avec

$$B^{\gamma}_{\lambda\alpha} = \frac{\partial^2 \Psi^{\gamma}}{\partial y^{\lambda} \partial y^{\alpha}} (y).$$

Nous poserons aussi $A^{\alpha}_{\lambda} = \dfrac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}(x)$, $A^{\alpha}_{\lambda\gamma} = \dfrac{\overline{\partial^2 \varphi^{\alpha}}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\gamma}}(x)$; dans toutes les expressions trouvées nous éliminerons les $B^{\gamma}_{\lambda\alpha}$ en remarquant que

$$B^{\gamma}_{\lambda} = (A^{-1})^{\gamma}_{\lambda} \quad \text{et} \quad B^{\gamma}_{\lambda\alpha} = - B^{\gamma}_{\rho} B^{\epsilon}_{\lambda} B^{\nu}_{\alpha} A^{\rho}_{\epsilon\nu}.$$

En regroupant les termes en facteurs des symboles de Christoffel et en tenant compte des équations d'Einstein nous obtenons le système des équations aux conjugaisons sur $\mathscr{M}$:

1 $$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,(C'^{\alpha\beta\lambda\mu} - \rho'\,u'^{\alpha}\,u'^{\beta}\,\Sigma'^{\lambda\mu})\,\cdot\\ &\quad\cdot\left[-g_{\gamma\delta}\,A^{\rho}_{\epsilon\nu}(B^{\gamma}_{\rho}B^{\epsilon}_{\lambda}B^{\nu}_{\alpha}B^{\delta}_{\mu} + B^{\gamma}_{\lambda}B^{\delta}_{\rho}B^{\epsilon}_{\mu}B^{\nu}_{\alpha}) + \right.\\ &\quad\left. + B^{\gamma}_{\lambda}B^{\delta}_{\mu}B^{\rho}_{\alpha}\,\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g'_{\lambda\mu}}{\partial y^{\alpha}}\right]\end{aligned}\right.$$

2 $$\{ + t^{\beta}$$

3 $$\left\{ - \rho'\,f'\,\frac{u^{\sigma}}{K^{2}}\left(A^{\beta}_{\rho\sigma}\,u^{\rho} + A^{\beta}_{\rho}\,\frac{\partial u^{\rho}}{\partial x^{\sigma}}\right)\right.$$

4 $$\left\{\begin{aligned}&+ \rho'\,f'\,u'^{\beta}u'^{\alpha}\left[\frac{u'^{\gamma}\,u'^{\delta}}{2}\;\frac{\partial g'_{\gamma\delta}}{\partial y^{\alpha}} + \right.\\ &\quad\left. + \frac{u'^{\delta}}{K}\;g'_{\gamma\delta}\,B^{\sigma}_{\alpha}\left(A^{\gamma}_{\rho\sigma}\,u^{\rho} + A^{\gamma}_{\rho}\,\frac{\partial u^{\rho}}{\partial x^{\sigma}}\right)\right]\end{aligned}\right.$$

5 $$\left\{ - \rho'\,u'^{\beta}u'^{\alpha}\,\frac{\partial f'}{\partial y^{\alpha}}\right.$$

6 $$\left\{\begin{aligned}&+\left[\Pi'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} - \rho'\,u'^{\alpha}\,u'^{\beta}\,\frac{\partial f'}{\partial \sigma'^{\lambda\mu}_{0}}\right]\cdot\\ &\quad\cdot\left[(A^{\lambda}_{\nu\rho}A^{\mu}_{\tau} + A^{\mu}_{\tau\rho}A^{\lambda}_{\nu})\,B^{\rho}_{\alpha}\,\sigma^{\nu\tau} + A^{\lambda}_{\nu}A^{\mu}_{\tau}B^{\rho}_{\alpha}\,\frac{\partial \sigma^{\nu\tau}}{\partial x^{\rho}}\right]\end{aligned}\right.$$

7 $$\left\{ + (A^{\alpha}_{\lambda\rho}B^{\rho}_{\alpha}A^{\beta}_{\mu} + A^{\beta}_{\mu\lambda})\,\sigma^{\lambda\mu} + A^{\beta}_{\mu}\,\frac{\partial \sigma^{\lambda\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right.$$

8 $$\{+ \Gamma'^{\ \alpha}_{\alpha\ \lambda}\,(\sigma'^{\beta\lambda} + A^{\beta}_{\rho}A^{\lambda}_{\mu}\,\sigma^{\rho\mu})$$

9 $$\left\{ - \Gamma'^{\ \beta}_{\alpha\ \lambda}\left(R'^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}R'\,g'^{\alpha\lambda}\right)\right.$$

$$= 0.$$

Rappelons que u, g, g' sont des données, que $R'^{\alpha\lambda}$ et R' sont respectivement le tenseur de Riemann et la courbure scalaire de $\mathscr{M}'$ et qu'ils sont connus, que les $\sigma^{\lambda\mu}$ représentent les précontraintes ou contraintes sur $\mathscr{M}$ et qu'ils sont donnés ainsi que leurs dérivées: dès que l'on choisit le comportement du milieu élastique, c'est-à-dire σ' ainsi que $\Sigma'^{\lambda\mu}$ et $\dfrac{\partial f'}{\partial \sigma_0'^{\lambda\mu}}$, en fonction de y, ϵ' et σ_0', ce système est un système d'ordre 2 quasi-linéaire de quatre équations en les quatre composantes de la conjugaison φ.

Les termes (1) sont les termes fondamentaux liés au comportement du milieu; on remarquera la présence de u'^β devant le terme $\Sigma'^{\lambda\mu}$. L'expression $\dfrac{\partial g'_{\lambda\mu}}{\partial y^\alpha}$, ainsi que les B^γ_ρ et les autres termes définis sur $\mathscr{M}'$ sont calculés au point $y = \varphi(x)$ de $\mathscr{M}'$. Le terme (2) provient de la non-homogénéité éventuelle de la réponse du milieu. Le terme (3) correspond aux termes d'inertie, il est indépendant de tout comportement. Le terme (4) contient u'^β en facteur, et provient de la non-holochronie éventuelle de φ, il disparaît si et seulement si φ est holochrone; il pourra être négligé dans de nombreux cas. Le terme (5) contient également u'^β, il est souvent nul car dans les exemples habituels f' ne dépend de y que par l'intermédiaire de ϵ' et σ'. Le terme (6) est lié à la dépendance éventuelle de σ' et f' en d'éventuelles précontraintes. Le terme (7) correspond au transport des précontraintes sur $\mathscr{M}'$. Les termes (8) et (9) jouent le rôle de source; ils sont typiquement relativistes et liés à la courbure de $\mathscr{M}'$.

Lorsque les contraintes et les précontraintes sont négligeables, dans l'expression des termes de courbure (8) et (9) par rapport aux termes d'inertie, il reste toutefois les termes $-\Gamma'^{\,\beta}_{\alpha\ \lambda}\rho' u'^\alpha u'^\lambda$ qui ne peuvent être tous partout nuls puisque, en présence de matière, l'espace $(\mathscr{M}', g')$ ne peut être plat. Ils peuvent être rapprochés des termes sources des équations approchées obtenues dans le cas infinitésimal par Weber, *cf* $C^2\rho_M R^1{}_{010}$ dans l'équation des ondes longitudinales le long de l'axe x_1, 8.34, p. 132 de [12], et par Papapetrou, *cf* ρR_{iook} dans l'équation i, k du système 52, p. 77 de [7].

On obtiendra les équations exactes relativistes des conjugaisons des milieux à comportement linéaire et isotrope usuels en prenant

$$\sigma'^{\alpha\lambda} = C'^{\alpha\lambda\mu\nu}\epsilon'_{\mu\nu}$$

puis

$$C'^{\alpha\lambda\mu\nu} = L\,\gamma'^{\alpha\lambda}\gamma'^{\mu\nu} + M(\gamma'^{\alpha\mu}\gamma'^{\lambda\nu} + \gamma'^{\alpha\nu}\gamma'^{\lambda\mu}).$$

Dans le calcul de l'expression correspondante t^β on tiendra compte du fait que L, M, γ' dépendent en général du point y. Les équations obtenues ne sont pas linéaires, les conjugaisons ne sont pas infinitésimales.

6. ONDES DE CONJUGAISONS

Nous allons maintenant utiliser le système des équations aux conjugaisons pour étudier la propagation éventuelle d'ondes de conjugaisons d'un milieu continu relativiste quelconque.

Les conditions exactes de propagation d'une onde de conjugaison d'ordre deux d'amplitude non nulle dans la «direction» de l'espace-temps associée à une forme n donnée, se lisent directement sur le système.

Notons $\mathscr{P}$ la polarisation de cette onde; $\mathscr{P}$ est un champ de vecteurs sur $\mathscr{M}'$, alors que n est un champ de 1-formes sur $\mathscr{M}$. Les conditions de propagation sont données par le système:

$$P^{\beta}_{\nu}(n)\,\mathscr{P}^{\nu} = (\rho' f' K^{-2} u^{\lambda} u^{\mu} - \sigma^{\lambda\mu})\, n_{\lambda} n_{\mu} \mathscr{P}^{\beta},$$

où P est le champ de tenseurs une fois contravariant et une fois covariant sur $\mathscr{M}'$, dépendant de n, défini par les relations:

$$\begin{aligned} -P^{\beta}_{\nu} = {} & C'^{\alpha\beta\lambda\mu} B^{\gamma}_{\nu} B^{\epsilon}_{\lambda} B^{\tau}_{\alpha} B^{\delta}_{\mu} g_{\gamma\delta}\, n_{\epsilon} n_{\tau} - \sigma^{\lambda\mu} B^{\rho}_{\nu} A^{\beta}_{\mu} n_{\lambda} n_{\rho} - \\ & - 2\,\Pi'^{\alpha\beta}_{\nu\mu} B^{\rho}_{\alpha} A^{\mu}_{\tau} \sigma^{\lambda\tau} n_{\lambda} n_{\rho} - u'^{\beta} V_{\nu}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} -V_{\nu} = {} & 2\rho' u'^{\alpha} \frac{\partial f'}{\partial \sigma_0'^{\nu\mu}} B^{\rho}_{\alpha} \sigma^{\lambda\tau} A^{\mu}_{\tau} n_{\lambda} n_{\rho} - \\ & - \rho' u'^{\alpha} \Sigma'^{\lambda\mu} B^{\gamma}_{\nu} B^{\epsilon}_{\lambda} B^{\tau}_{\alpha} B^{\delta}_{\mu} g_{\gamma\delta}\, n_{\epsilon} n_{\tau} - \rho' f' K^{-2} u'^{\delta} g'_{\nu\delta}\, n_{\rho} n_{\sigma} n^{\sigma} u^{\rho}. \end{aligned}$$

Soint $\mathscr{V}_{\zeta}(n)$, $\zeta = 1, 2, 3, 4$, les quatre valeurs propres réelles ou complexes, distinctes ou confondues, de $P(n)$. La condition de propagation selon n s'écrit:

$$\prod_{\zeta=1}^{4} \left[(\rho' f' K^{-2} u^{\lambda} u^{\mu} - \sigma^{\lambda\mu}) n_{\lambda} n_{\mu} - \mathscr{V}_{\zeta}(n)\right] = 0.$$

Lorsque n est une solution réelle de cette équation la vitesse de l'onde correspondante est $-\dfrac{u^{\alpha} n_{\alpha}}{\sqrt{-\gamma^{\alpha\beta} \bar{n}_{\alpha} n_{\beta}}}$, finie non nulle lorsque n est choisie telle que $u^{\alpha} n_{\alpha} \neq 0$ et $\gamma^{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \neq 0$, ce que nous supposerons vérifié dans la suite. Puisque $\rho' f' u^{\lambda} u^{\mu} n_{\lambda} n_{\mu}$ est strictement positif l'existence d'une telle onde, se propageant à vitesse finie non nulle, nécessite que l'une des $\mathscr{V}_{\zeta}(n)$ soit réelle positive; la condition de propagation sera alors vérifiée pour tout champ de précontraintes suffisamment petites.

Dans le cadre de ce travail nous ne pousserons pas plus loin dans le cas général l'étude de l'existence de valeurs propres réelles et positives.

Nous allons toutefois considérer quelques cas particuliers importants qui montrent que l'étude des ondes de conjugaisons est parallèle à celle des ondes acoustiques en élasticité non linéaire classique.

1) Lorsque la variation de l'énergie interne spécifique en fonction du tenseur précontraintes et du tenseur déformation est négligée, lorsque les contraintes sont indépendantes des précontraintes et lorsque le tenseur image des précontraintes et le tenseur contraintes sont spatiaux, l'image par $P(n)$ de tout vecteur orthogonal à u' est nécessairement un vecteur orthogonal à u'. Le problème des ondes à polarisation spatiale est alors réduit à l'étude des valeurs propres réelles et positives de l'application Q définie par:

$$-Q^i_j = C'^{ai\lambda\mu} B^\gamma_j B^\epsilon_\lambda B^\tau_a B^\delta_\mu g_{\gamma\delta} n_\epsilon n_\tau - \sigma^{lm} B^\tau_j A^i_m n_l n_\tau, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

dans un système de coordonnées de $T_{\varphi(x)}\mathscr{M}'$, adaptées à u'. Puisque nous sommes en dimension impaire cette application linéaire Q admet toujours au moins une valeur propre réelle. Pour que cette valeur propre soit positive, il suffit que de plus la forme quadratique associée à Q soit définie positive.

Dans ce premier cas, les conditions de propagation sont vérifiées par au moins un vecteur-polarisation spatial.

2) Si de plus nous supposons qu'il n'y a pas de précontraintes et que, comme dans le cas hyperélastique, la relation $C'^{\alpha\beta\lambda\mu} = C'^{\lambda\mu\alpha\beta}$ est vérifiée pour tous α, β, λ, μ la matrice Q est symétrique et ses vecteurs propres forment une base de l'espace orthogonal à u'. Pour que les trois valeurs propres correspondent à des vitesses réelles il est nécessaire et suffisant que la forme quadratique associée à Q soit à trois carrés positifs.

Remarquons que $-Q$ peut s'écrire dans ce cas: $C'^{ailm} g'''_{jm} n'_l n'_a$ où g''' et n' désignent les transportées par Ψ^* de g et n sur $\mathscr{M}'$. Le caractère défini positif de la forme quadratique associée à Q est directement lié au caractère défini positif de C' considéré comme forme quadratique sur l'espace des tenseurs 2 fois covariants symétriques sur $\mathscr{M}'$.

Dans ce second cas les conditions de propagation sont vérifiées par trois vecteurs-polarisation spatiaux indépendants.

3) Pour terminer nous considérons le cas d'un comportement linéaire isotrope «usuel»; avec les notations utilisées ci-dessus il vient:

$$-P^\beta_\nu = [L\gamma'^{\alpha\beta}\gamma'^{\lambda\mu} + M(\gamma'^{\alpha\lambda}\gamma'^{\beta\mu} + \gamma'^{\alpha\mu}\gamma'^{\beta\lambda})]\, g'''_{\nu\mu} n'_\lambda n'_\alpha -$$
$$- A^\beta_\mu \sigma^{\lambda\mu} n_\lambda n'_\nu - \rho' f' K^{-2} \omega'_\nu (u^\sigma n_\sigma)^2 u'^\beta,$$

qui est la généralisation en relativité générale du tenseur acoustique pour des déformations élastiques finies et pour des précontraintes nulles.

Lorsque φ est une isométrie et lorsque les précontraintes sont nulles, l'équation de propagation se factorise. Tous calculs faits, il vient:

$$\rho' f'(u^\sigma n_\sigma)^2 \{\rho' f'(u^\sigma n_\sigma)^2 + M\gamma^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta\}^2 \cdot$$
$$\cdot \{\rho' f'(u^\sigma n_\sigma)^2 + (L + 2M)\, \gamma^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta\} = 0.$$

C'est l'équation de propagation que nous avions déjà obtenue par une autre approche [7]. Pour toute forme n on a, comme dans le cas des ondes d'accélération de la mécanique classique, trois modes de propagation réels à vitesse finie non nulle: un mode simple longitudinal de vitesse $\sqrt{\dfrac{L + 2M}{\rho' f'}}$ et un mode double transverse de vitesse $\sqrt{\dfrac{M}{\rho' f'}}$.

7. COMPARAISON AVEC L'APPROCHE DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE

Pour espace-temps $\mathcal{M}$ nous prenons, dans ce paragraphe, $R \times R^3$ muni du champ de vecteurs unitaire vertical canonique V, et de sa structure usuelle d'espace-temps de Minkowski g_0 de signature $(+, -, -, -)$. L'opposé du projecteur d'espace associé à g_0 et V est noté Γ; il induit sur $\{0\} \times R^3$ la métrique classique usuelle Γ_0. Pour l'espace-temps $\mathcal{M}'$ nous procédons de même d'où les notations: $V', g_0', \Gamma', \Gamma_0'$.

Pour métrique g nous prenons g_0, pour champ u nous prenons V, cela correspond à un milieu (classique) au repos; pour métrique g', nous prenons g_0'. Tout difféomorphisme φ de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}'$ définit un mouvement, donc un vecteur u' sur $\mathcal{M}'$; φ est alors une conjugaison du mouvement u en le mouvement u'; nous ne considérerons ici que les conjugaisons qui conservent le «temps absolu»; nous écrirons alors

$$y^0 = x^0, \qquad y^i = \varphi^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

ou encore $y^i = \varphi_t^i(x^1, x^2, x^3)$ avec $x^0 = y^0 = t$. Ceci est la description classique du mouvement d'un milieu tridimensionnel.

Un calcul rapide donne:

$$\epsilon_{00}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left\{ g_{00}' - g_{00} - \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}\frac{\partial \varphi^j}{\partial t}\Gamma'_{ij} \right\},$$

$$\epsilon_{0i}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left\{ -\frac{\partial \varphi^l}{\partial t}\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}\Gamma'_{lk} \right\},$$

$$\epsilon_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left\{ \Gamma_{ij} - \frac{\partial \varphi^l}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^j}\Gamma'_{lk} \right\}.$$

La partie spatiale de $\epsilon^{(2)}$ n'est rien d'autre que le tenseur déformation usuel à l'instant t en variables de Lagrange. La simplicité de cette relation entre $\epsilon^{(2)}$ et le tenseur-déformation tridimensionnel usuel est un des arguments en faveur de l'emploi de $\epsilon^{(2)}$.

Quant au premier tenseur déformation, il s'écrit ici:

$$\epsilon_{00}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left\{\gamma'_{00} + 2\frac{\partial\varphi^l}{\partial t}\gamma'_{0l} - \frac{\partial\varphi^l}{\partial t}\frac{\partial\varphi^k}{\partial t}\Gamma'_{lk}\right\} + H_{00},$$

$$\epsilon_{0i}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}\gamma'_{0k} - \frac{\partial\varphi^l}{\partial t}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}\Gamma'_{lk}\right\} + H_{0i},$$

$$\epsilon_{ij}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left\{\Gamma_{ij} - \frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^l}{\partial x^j}\Gamma'_{lk}\right\} + H_{ij}.$$

Les termes $H_{\alpha\beta}$ sont négligeables dès que les vitesses sont petites par rapport à celle de la lumière, que nous avons prise égale à 1; dans ce cas $\epsilon_{00}^{(1)}$ et $\epsilon_{0i}^{(1)}$ sont aussi négligeables. Quant à la partie spatiale de $\epsilon^{(1)}$ elle n'est pas exactement le tenseur habituel en mécanique classique, mais peut lui être assimilée lorsque les vitesses sont négligeables.

Ainsi les tenseurs $\epsilon^{(1)}$ et $\epsilon^{(2)}$ peuvent donc être assimilés sur $R \times R^3$ au tenseur déformation habituellement associé à une déformation finie, «complété» par des zéros.

Pour un milieu linéaire isotrope la première équation des conjugaisons est identiquement vérifiée et le comportement est donné par:

$$C'^{ijkl} = \lambda\,\gamma'^{ij}\,\gamma'^{kl} + \mu(\gamma'^{ik}\,\gamma'^{jl} + \gamma'^{il}\,\gamma'^{jk}).$$

Les équations aux conjugaisons s'écrivent en coordonnées orthonormées:

$$+ (\lambda + \mu)\sum_{t,l} B_p^t\, B_l^q\, B_j^r\, B_l^t\, A_{qr}^p +$$

$$+ \mu \sum_{t,l} B_p^t B_l^q\, B_l^r\, B_j^t\, A_{qr}^p - \rho'\, A_{00}^j + t^j + \mathcal{P}^j = 0,$$

avec

$$t^j = \delta_j^i\,\frac{\partial\lambda}{\partial y^i}(-\,tr\,\epsilon') + 2\,\frac{\partial\mu}{\partial y^i}\,\epsilon'^{ij}$$

$$\mathscr{P}^j = \sigma_0^{lk}(A^i_{lp} B^p_i A^j_k + A^j_{lk}) + A^j_k \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^i} ,$$

si les coefficients λ et μ sont indépendants des précontraintes.

Si l'on suppose de plus les déformations petites, les précontraintes nulles partout et le milieu homogène, on retrouve les équations de Lamé:

$$0 = + (\lambda + \mu) \sum_i \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^i \partial x^j} + \mu \sum_i \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^i \partial x^i} - \rho \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial t^2} ,$$

$$j = 1, 2, 3 .$$

L'approche des milieux continus en termes de conjugaisons finies de mouvements dans des espaces-temps quadridimensionnels s'avère donc contenir, comme cas particulier, l'élasticité des milieux continus classiques.

8. COMPARAISON AVEC LES DIFFÉRENTES PRÉSENTATIONS DE L'ÉLASTICITÉ RELATIVISTE

Nous allons maintenant également retrouver comme cas particulier les principales théories de l'élasticité relativiste déjà existantes dues notamment à Herglotz, Souriau [13], Rayner [10] puis Schöpf [12], Grot-Eringen [6], Maugin [8], Cattaneo [4], Carter-Quintana [3], Madame Choquet et moi-même [5], Carter [2] et bien d'autres, dont Weber et Papapetrou [14, 9, 15] dans le cas infinitésimal. Ces théories nous semblent pouvoir être approximativement réparties en trois types principaux: d'une part les théories étudiant le mouvement d'un corps d'épreuve tridimensionnel dans un espace-temps minkowskien ou général, d'autre part celles qui utilisent une structure de variété tridimensionnelle, riemannienne sur le quotient de l'espace-temps par la congruence des lignes d'univers du milieu, et enfin la théorie de Rayner.

i) Pour retrouver les théories du premier type, il faut préalablement remarquer qu'elles introduisent un corps d'épreuve S, n'agissant pas sur la métrique, tridimensionnel, muni d'une structure γ_0 de référence, puis une famille, à un paramètre de type temps, de plongements ϕ_t de S dans un espace temps $\mathscr{M}'$ (classique, minkowskien ou général). Il en résulte que $\mathscr{M}'$ est munie de deux feuilletages transverses $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_3$: le feuilletage $\mathscr{F}_1$ de dimension 1 a pour feuilles les lignes d'univers, trajectoires de $\phi_t(x)$ à x fixé; et le feuilletage $\mathscr{F}_3$ de dimension 3 a pour feuilles les $\phi_t(x)$, à t fixé. Le champ u' sera le champ unitaire tangent à $\mathscr{F}_1$; un tel mouvement est conjugué au mouvement sur $R \times S$ dont les lignes d'univers sont les verticales $R \times \{x\}$: il suffit de poser $\varphi(t, x) = \phi_t(x)$, $\mathcal{M} = R \times S$ et g métrique sur $R \times S$ invariante par translation, induisant la métrique de référence γ_0 sur tout $t_0 \times S$ pour retrouver ces mouvements avec notre approche. Souvent les théories du type i) n'utilisent ni $R \times S$, ni cette métrique g et travaillent en fait uniquement sur un $t_0 \times S$ muni de γ_0: cela crée alors une difficulté supplémentaire pour le transport des divers tenseurs covariants et contravariants en présence, due au fait que $t_0 \times S$ est de dimension 3, alors que $\mathcal{M}'$ est de dimension 4. Lorsque les tenseurs-déformations peuvent être définis dans ces théories sous forme covariante pour fixer les idées, et indépendante des coordonnées ou repères en présence, nous pouvons les retrouver en considérant notre premier tenseur déformation, plus précisément la projection spatiale de $\epsilon^{(1)}$ sur $t_0 \times S$, ou bien, sur $\mathcal{M}'$, le tenseur $\epsilon'^{(1)}$ ou sa projection spatiale. Le fait que σ' ne dépende dans ces théories que de la partie spatiale de ϵ' peut évidemment être absorbé de façon tensorielle et sans système particulier de coordonnées dans la loi de comportement, et n'apparaît ici que comme un cas particulier.

ii) Nous allons montrer maintenant comment retrouver les théories du second type (avec quotient): soit φ une conjugaison de $(\mathcal{M}, g, u)$ vers $(\mathcal{M}', g', u')$ dans le cas particulier où le quotient de $\mathcal{M}'$ par sa congruence de lignes d'univers est un espace séparé X, muni canoniquement d'une structure de variété différentiable de dimension 3, et d'une métrique riemannienne γ_0. Si π' désigne la projection de $\mathcal{M}'$ sur X, le quotient de $\mathcal{M}$ par sa congruence de lignes d'univers est X muni de la métrique riemannienne γ_0, la projection canonique étant alors $\pi = \pi' \circ \varphi$.

Dans la théorie proposée en [3], ce qui joue le rôle de «métrique de référence» K est essentiellement un tenseur spatial, invariant le long de u', c'est à dire de la forme $\pi'^*\gamma_0$. Pour retrouver ces théories [2], [3] à partir de la nôtre, nous partirons d'un espace $(\mathcal{M}, g)$ et d'un champ u, pour lesquels l'espace-quotient est un (X, γ_0), de projection différentiable π et où γ est essentiellement $\pi^*\gamma_0$; puis nous travaillerons uniquement en coordonnées d'Euler, c'est à dire sur $\mathcal{M}'$, en oubliant la conjugaison φ et la métrique g'', et en ne considérant plus que γ'' jouant le rôle de K. L'unique tenseur-déformation qui peut être défini ici est notre $\epsilon'^{(1)}$ (au signe près). Remarquons que les mouvements particuliers du type i) précédent sont évidemment retrouvés en posant $X = S$, $\pi(t, x) = x$, et en travaillant sur $\mathcal{M}'$.

iii) Pour retrouver la théorie de Rayner, où n'interviennent qu'un seul espace-temps, qu'un seul mouvement λ, aucune conjugaison mais deux métriques, nous considèrerons tout d'abord le mouvement $(\mathcal{M}', g', u')$ où $\mathcal{M}'$ sera l'espace-temps du milieu en mouvement de Rayner, où g' sera la métrique qu'il note

g et u' le vecteur qu'il note λ. Pour que $(\mathscr{M}, g'', u'')$ corresponde aux grandeurs de référence de Rayner il faut que la métrique g'' soit sa métrique g^0 et que le champ de vecteurs u'' soit identique au champ de vecteurs λ. Nous remarquons alors que la métrique g^0 de référence est reconstruite à partir d'une perturbée spatiale notée $\tilde{g}^0$ du projecteur d'espace $\tilde{g}$ de g (de Rayner) par la formule:

$$(2\text{-}1) \qquad g^0_{ij} = \tilde{g}^0_{ij} - \lambda_i \lambda_j,$$

où les λ_i sont les composantes covariantes de $u' = \lambda$ pour la métrique g (de Rayner) dans laquelle il est unitaire; il vient alors $g^0_{ij}\lambda^i = \lambda_j$ ce qui correspond pour nous à $\omega'' = \omega'$, où ω'' désigne la forme covariante de u'' pour la métrique g''. Il en résulte que toute conjugaison finie de $(\mathscr{M}, g, u)$ en $(\mathscr{M}', g', u')$ devra, pour que $(\mathscr{M}', g'', u'')$ corresponde au mouvement de référence de Rayner, vérifier: $u'' = u'$ et $\omega'' = \omega'$. La condition $\mathscr{L}_\lambda \tilde{g}^0 = 0$ s'écrit alors $\mathscr{L}_{u''}\gamma'' = 0$, ou $\mathscr{L}_u \gamma = 0$.

Il suffit donc de se restreindre à des $(\mathscr{M}, g, u)$ de Born et à des conjugaisons à la fois holotopes et holochrones pour décrire toutes les situations rencontrées par Rayner; pour retrouver complètement son cadre nous devrons oublier $(\mathscr{M}, g, u)$ et la conjugaison φ en renonçant donc à toute notion de déformation, puis nous travaillerons uniquement en coordonnées d'Euler. Le tenseur déformation $\frac{1}{2}(\tilde{g}^0_{ij} - \tilde{g}_{ij})$ qui apparaît alors implicitement par le biais de $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \cdot C^{kl}_{ij}(\tilde{g}_{kl} - \tilde{g}^0_{kl})$ n'est rien d'autre que la valeur, ici commune, de nos deux tenseurs ϵ'^1 et ϵ'^2.

9. CONCLUSION

Nous venons donc de présenter quelques-uns des éléments fondamentaux d'une mécanique des milieux continus relativistes reposant sur la notion de conjugaisons entre deux mouvements.

Ce cadre relativiste et global ne nécessite aucune distinction particulière entre le cas de la relativité restreinte et celui de la relativité générale, aucune décomposition même locale du type $R \times \mathscr{M}^3$, aucun paramètre du type temps, aucune projection sur une variété tridimensionnelle, aucune section globale d'espace cf [1], aucun système de coordonnées spéciales, aucun repère privilégié local ou global. On peut composer plusieurs conjugaisons finies successives; on peut considérer la conjugaison inverse d'une conjugaison donnée, $(\mathscr{M}', g', u')$ joue alors le rôle de référence. Les deux mouvements u et u' ne sont pas supposés irrotationnels au sens de Synge c'est à dire localement synchronisables par le temps propre; ils ne sont pas même supposés localement synchronisables au sens de Sachs-Wu [11]. Nous n'avons pas fait l'hypothèse que la conjugaison φ conservait les distances, rien n'empêche donc l'existence d'une ligne d'univers de

$\mathscr{M}'$ qui soit asymptote pour toutes ses voisines.

Notre cadre contient comme cas particulier, outre celui des milieux élastiques classiques en déformations et coordonnées quelconques, les principales théories existantes de l'élasticité relativiste; il suffit de particulariser notamment $(\mathscr{M}, g, u)$ et éventuellement g', puis d'imposer des conditions d'orthogonalité aux tenseurs contraintes, puis des conditions d'holochronie ou d'holotopie aux conjugaisons considérées. L'approche des milieux continus relativistes par les conjugaisons finies permet donc de comparer et surtout d'unifier toutes ces théories d'élasticité.

De plus la distinction éventuelle des deux espaces-temps permet de prendre en compte l'interaction entre la métrique et le déplacement de matière sans savoir si c'est la conjugaison, finie ou non, qui est à l'origine de la modification de g en g', ou si c'est la modification, finie ou non, de la métrique qui a créé la conjugaison.

Une description de l'évolution de milieux continus au voisinage des singularités d'une métrique $\hat{g}'$ d'un espace-temps $\hat{\mathscr{M}}'$ peut être obtenue par notre méthode même en cas de désintégration ou d'implosion du milieu: il suffit de considérer des conjugaisons de $(\mathscr{M}, g, u, \rho)$ dans l'espace-temps $(\mathscr{M}', g')$ où $\mathscr{M}'$ est une sous-variété ouverte du complémentaire dans $\hat{\mathscr{M}}'$ de l'ensemble singulier et où g' est la restriction de $\hat{g}'$ à $\mathscr{M}'$.

Le mouvement $(\mathscr{M}, g, u)$ qui sert de référence géométrique est quelconque, les tenseurs contraintes peuvent être spatiaux, comme non spatiaux; les milieux considérés peuvent donc ne pas être «parfaitement élastiques» [2], ils peuvent être le siège de phénomènes thermodynamiques, électromagnétiques, . . . , dans l'état initial comme, et surtout, dans l'état final. En prenant en compte les équations d'état correspondantes, on obtiendra en fait une théorie des déformations finies de milieux continus relativistes généraux.

Le système aux conjugaisons du mouvement u en le mouvement u' est composé de quatre équations à quatre inconnues; il n'y a donc aucun problème de surdétermination; il n'est pas nécessaire, du point de vue mathématique, d'imposer des relations supplémentaires a priori entre σ' et f'; c'est à la physique et à l'expérimentation des milieux continus relativistes qu'est laissée la détermination des comportements, et d'éventuelles relations.

L'étude sommaire des ondes de conjugaisons a montré que celles-ci correspondent aux ondes acoustiques usuelles de l'élasticité finie lorsque les tenseurs contraintes sont spatiaux.

Le système peut d'autre part être considéré, ainsi que nous l'avons vu, comme une version des équations obtenues par Weber et Papapetrou, «finie et intégrée», c'est-à-dire en termes de conjugaisons finies et non de tenseur déformation infinitésimal.

Plus généralement, la métrique g' peut être supposée inconnue. Nous ajoutons alors aux équations aux conjugaisons obtenues les équations d'Einstein du milieu. Nous remarquons que ces dix dernières équations ne contiennent pas de dérivées secondes en la conjugaison et que les quatre premières peuvent être écrites sans faire intervenir explicitement de dérivées secondes en les potentiels de gravitation. Nous obtenons ainsi un système de quatorze équations ne les quatorze inconnues φ^α et $g'_{\lambda\mu}$; ce système est hyperbolique moyennant les hypothèses simples, habituellement vérifiées, d'hyperbolicité du système aux conjugaisons finies.

Nous reviendrons bien sûr dans d'autres travaux sur les ondes de propagation dans le cas de réponses plus générales, sur le cas limite des conjugaisons infinitésimales, sur le rôle des précontraintes et enfin sur l'effet d'ondes gravitationnelles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. AVEZ: *Modèle d'univers stationnaire sans section d'espace globale*, Séminaire de Mécanique Analytique et de Mécanique céleste, 5, 1961 - 1962, exp. 16, Paris.
[2] B. CARTER: *Interaction of Gravitational waves with an elastic medium*, Ecole d'été des Houches 1983, p. 455 - 464.
[3] B. CARTER et H. QUINTANA: *Foundations of general relativistic high pressure elasticity theory*, Proc. R. Soc. London A 331, 1972, p. 578.
[4] C. CATTANEO: *Essai d'une théorie relativiste de l'élasticité*, C.R. Acad. Sc. Paris, 272 A (1971) p. 1421 - 1424.
[5] Y. CHOQUET-BRUHAT et L. LAMOUREUX-BROUSSE: *Sur les équations de l'élasticité relativiste*, C.R. Acad. Sc. Paris 276, A, (1973), p. 1317 - 1320.
[6] R. GROT et C. ERINGEN: *Relativistic continuum mechanics*, Int. J. Engineering Sci. 4 (1966) p. 611 - 638.
[7] L. LAMOUREUX-BROUSSE: *Ondes asymptotiques et approchées en mécanique classique et relativiste*, Thèse Paris VI, 1974.
[8] G. MAUGIN: *Infinitesimal discontinuities in initially stressed relativistic elastic solids*, Comm. Math. Phys. 53 (1977) 233 - 256.
[9] A. PAPAPETROU: *Vibrations élastiques excitées par une onde gravitationnelle*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. XVI, n. 1, 1972, p. 63 - 78.
[10] C.B. RAYNER: *Elasticity in general relativity*, Proc. Roy. Soc. London A 272, 1963 p. 44 - 53.
[11] R.K. SACHS and H. WU: *General relativity for Mathematicians*, Springer 1977.
[12] H.G. SCHÖPF: *Elastische Stosswellen im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. d. Phys. VII 15 (1965) p. 348 - 356.
[13] J.M. SOURIAU: *Géométrie et relativité*, Hermann, Paris, 1964.
[14] J. WEBER: *General relativity and gravitational waves*, Interscience publishers, Inc. New York 1961.
[15] J. WEBER: *The search for gravitational radiation*, Gen. Rel. and Grav. ed. A. Held 1982, Vol. II, p. 435 - 467.

Manuscript received: June 22, 1987.